Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 36

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

11 de septiembre de 2019

1. Funciones Generalizadas

Demostrar que

$$\int \delta^{(3)}\left(\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{R}}\left(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}{c}\right)\right) \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' = \int \frac{\delta^{(3)}(\vec{\mathbf{z}})}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \, \mathrm{d}z_1 \, \mathrm{d}z_2 \, \mathrm{d}z_3 \tag{1}$$

Donde

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}|}, \qquad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{R}}}{\mathrm{d}t}$$

Primero de todo, para simplificar la notación, vamos a definir

$$\tau = t - \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}{c} \tag{2}$$

Y, dado que podemos escribir

$$1 = \int \delta(t' - \tau) \, \mathrm{d}t' \tag{3}$$

Multiplicando por 1 la integral de la izquierda

$$\int \delta(t' - \tau)\delta^{(3)}\left(\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{R}}\,(\tau)\right) \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}t' = \int \delta(t' - \tau)\delta^{(3)}\left(\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{R}}\,(t')\right) \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}t' \tag{4}$$

Donde, gracias a haber introducido la delta $\delta(t' - \tau)$, podemos cambiar todas las τ por t' (pues, total, después de integrar tendremos que imponer $t' = \tau$). Pero ahora podemos integrar r' sin dificultad, pues

$$f(\vec{\mathbf{r}}') = \vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{R}}(t')$$

cuyos ceros son trivialmente $\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{R}}(t')$ y $f' = 1$, quedando la integral:

$$\int \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{c}\right) \mathrm{d}t' \tag{5}$$

Ahora tenemos que solucionar esta integral, de nuevo tenemos que encontrar los ceros de la función

$$f(t') = t' - t + \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{c} \tag{6}$$

Puede parecer que no hemos ganado absolutamente nada, pero si interpretamos $\vec{\mathbf{R}}(t')$ como el camino que sigue una cierta partícula con masa no nula, entonces podemos demostrar que $f(t')$ tiene una única solución. En efecto, supongamos que hay dos soluciones distintas; t_1 y t_2:

$$t' - t + \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{c} = 0 \Longrightarrow |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')| = c(t - t') \tag{7}$$

Entonces, existen dos tiempos

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_1)| = c(t - t_1), \qquad |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_2)| = c(t - t_2) \tag{8}$$

Podemos suponer sin perder generalidad que $t_2 > t_1$. Pero esto implica que, usando (23)

$$|\vec{\mathbf{R}}(t_2) - \vec{\mathbf{R}}(t_1)| = \left|\left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_1)\right) - \left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_2)\right)\right| \geq \Big||\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_1)| - |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_2)|\Big| = |c(t - t_1) - c(t - t_2)| \tag{9}$$

Y, por lo tanto

$$|\vec{\mathbf{R}}(t_2) - \vec{\mathbf{R}}(t_1)| \geq |ct_2 - ct_1| = c|t_2 - t_1| \Longrightarrow \left|\frac{\vec{\mathbf{R}}(t_2) - \vec{\mathbf{R}}(t_1)}{t_2 - t_1}\right| \geq c \tag{10}$$

Por lo tanto, llegamos a una imposibilidad física (he supuesto que la partícula tiene masa no nula para no tener que preocuparme por el caso en el que se cumple la igualdad).
Una vez demostrado que la solución es única tenemos que calcular f', para esto primero calculemos

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|^2 = \left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')\right) \Longrightarrow 2|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')| \frac{\mathrm{d}|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{\mathrm{d}t'} = 2\left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')\right)}{\mathrm{d}t'} \tag{11}$$

Por lo tanto la derivada del valor absoluto es

$$\frac{\mathrm{d}|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{\mathrm{d}t'} = -\frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{R}}(t')}{\mathrm{d}t'} = -c\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{12}$$

Por lo que, la derivada de f es

$$f'(t') = 1 - \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{13}$$

Notemos que $|\vec{\boldsymbol{\beta}}| < |\hat{\mathbf{n}}| = 1$, la desigualdad es porque, como he dicho, suponemos que $\vec{\mathbf{R}}(t)$ es la trayectoria de una partícula con masa, mientras que la igualdad se deduce trivialmente de la definición de $|\hat{\mathbf{n}}|$. Gracias a esto tenemos que

$$1 - \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0 \tag{14}$$

por lo que podemos ignorar el valor absoluto (de nuevo, aquí la razón para suponer que la partícula tiene masa, porque si suponemos que $|\vec{\boldsymbol{\beta}}| = 1$ entonces podríamos estar dividiendo por 0).
Con todo esto, y definiendo t_0 como el único valor que anula la función f, tenemos que:

$$\int \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t')|}{c}\right) \mathrm{d}t' = \int \frac{\delta\left(t' - t_0\right)}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0} \mathrm{d}t' = \frac{1}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0} \tag{15}$$

Donde he definido

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_0)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}(t_0)|} \tag{16}$$

$$\vec{\boldsymbol{\beta}}_0 = \frac{1}{c} \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \tag{17}$$

Finalmente, solo tenemos que volver a notar que

$$1 = \int \delta^{(3)}(\vec{\mathbf{z}})\, \mathrm{d}^3 z \tag{18}$$

Para obtener el resultado deseado

$$\int \frac{\delta^{(3)}(\vec{\mathbf{z}})}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0}\, \mathrm{d}^3 z \tag{19}$$

A. Anexo: Desigualdad triangular inversa

En el ejercicio tenemos que hacer uso de la desigualdad triangular inversa, esta es una consecuencia de la desigualdad triangular[1]

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{20}$$

Entonces usando esta desigualdad calculamos

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Longrightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \tag{21}$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |x-y| + |x| \Longrightarrow |x-y| \geq -(|x| - |y|) \tag{22}$$

Por lo que

$$|x-y| \geq \Big| |x| - |y| \Big| \tag{23}$$

[1] Podéis encontrar esta desigualdad en https://es.wikipedia.org/wiki/Desigualdad_triangular